Кубок главы города 2010 г. Очный тур 14 апреля **7 класс**

1. За 18 дней брусок мыла уменьшился на 50% по высоте, на 30% по длине и на 20% по ширине. На сколько ещё дней его хватит, если каждый день расходуется один и тот же объём мыла?

Ответ: на 7 дней.

Решение. За 18 дней от бруска мыла останется $0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 100\% = 28\%$. Значит, за один день расходуется 4% бруска. Отсюда и получается ответ.

2. В некотором городе каждый одиннадцатый математик — шахматист, каждый тринадцатый шахматист — математик. Кого в городе больше — шахматистов или математиков?

Ответ: шахматистов больше.

Решение. Пусть в городе x математиков и y шахматистов. Тогда тех, кто одновременно и математик, и шахматист, с одной стороны, $\frac{x}{11}$, а. с другой стороны, $\frac{y}{13}$. Поэтому $\frac{x}{11} = \frac{y}{13}$ и $x = \frac{11}{13}y < y$.

3. У капитана двое сыновей и несколько дочерей. Если возраст капитана (а ему меньше ста лет) умножить на количество его детей и на длину его шхуны (это целое число метров), то получится 32118. Сколько лет капитану, сколько у него детей и какова длина его шхуны?

Ответ: капитану 53 года, у него шестеро детей, длина шхуны 101 метр.

Решение. Разложим число 32118 на множители: $32118 = 2 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 101$. Единственный делитель этого числа, меньший 100 и больший 6, число 53. Значит, капитану 53 года. Детей, по условию, больше трёх, и явно меньше 101. Поэтому их 6, а длина шхуны 101 метр. Шхуна большая, но бывали шхуны длиной до 140 метров.

4. Два насоса вместе заполняют бассейн за два часа, а раздельно они заполняют его за целое, но разное число часов. За сколько часов каждый насос заполняет бассейн?

Ответ: 3 и 6.

Решение. Пусть первый насос заполняет бассейн за m часов, а второй за n часов, причём $m < n$. Тогда $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Из условия следует, что $m > 2$. С другой стороны, $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$, откуда $\frac{1}{m} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}$. Поэтому $m < 4$. Единственное возможное значение $m = 3$. Из уравнения находим $n = 6$.

5. В классе из 31 учеников только пятеро всегда говорят правду, а остальные хитрецы, которые на любой вопрос отвечают правду или лгут по своему усмотрению. Можно ли, задавая вопросы ученикам этого класса (одному человеку можно задавать сколько угодно вопросов), по их ответам гарантированно обнаружить хотя бы одного хитреца? (Каждый ученик знает про каждого из своих одноклассников, правдивый тот или хитрец).

Ответ: можно.

Решение. Достаточно каждому предложить назвать всех правдивых учеников класса. Если A — правдивый, то он назовёт пятёрку правдивых, в том числе и себя. Тогда каждый из четырёх других названных им правдивыми действительно является правдивым и назовёт ту же пятёрку. Если A не входит в пятёрку учеников, назвавших только себя и других из этой пятёрки правдивыми, то A — хитрец. Если же такая пятёрка образуется, то либо все её члены действительно правдивые, либо все пятеро — хитрецы. Однако 31 учеников не могут разбиться на пятёрки. Ученик, не попавший в такую пятёрку, и является хитрецом.

Кубок главы города 2010 г. Очный тур 14 апреля **8 класс**

1. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN, высота BH и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Какие значения может принимать угол A треугольника?

Ответ: только $60°$.

Решение. Пусть O — указанная в условии точка пересечения. В треугольнике AOB высота, проведённая из вершины O, является и медианой. Поэтому треугольник AOB равнобедренный. Поэтому $\angle HAB = 2\angle OAB = 2\angle OBA = 2\angle HBA$. Но $\angle HAB + \angle HBA = 90°$. Отсюда $\angle HAB = 60°$.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются на стороне CD. Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются на стороне AB.

Доказательство. Пусть K — точка на стороне CD, принадлежащая биссектрисам углов CAD и CAB. По теореме о биссектрисе, $\frac{AD}{AC} = \frac{DK}{KC} = \frac{BD}{BC}$. Отсюда $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$. Из полученной пропорции вытекает, что биссектрисы углов ACB и ADB делят отрезок AB в одном и том же отношении. Но это и означает, что они пересекаются на стороне AB.

3. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел прямо под собой крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев после этого полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню, догнав её ещё через 4 минуты. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если его скорость в 5 раз меньше скорости дракона?

Ответ: в 3 раза.

Решение. Пусть y — скорость крысы, а x — скорость Гарри. Скорость дракона $5x$. Крыса и Гарри удалялись друг от друга в течение 0,5 мин со скоростью $y + 5x$, а сближались в течение 4 мин со скоростью $x - y$. Отсюда $0{,}5(y + 5x) = 4(x - y)$, $4{,}5y = 1{,}5x$, $x = 3y$.

4. По n трубам разного диаметра течёт вода с разной концентрацией морской соли. Известно, что для каждой трубы величина концентрации соли (в процентах) равна времени заполнения бассейна (в часах) водой из этой трубы. Если заполнять бассейн одновременно всеми трубами, то он заполнится за a часов. Какой при этом будет концентрация соли в бассейне?

Ответ: $na\%$.

Решение. Пусть труба с содержанием соли $x\%$ заполняет бассейн объёма V за x часов. Тогда за 1 час по этой трубе в бассейн поступает $\frac{V}{x} \cdot \frac{x}{100} = \frac{V}{100}$ (объёмных единиц) соли. Поэтому по n трубам за a часов поступит $na \cdot \frac{V}{100}$ соли.

5. Найдите все p, m и n, где p — простое число, а m и n — натуральные числа, для которых $n^4 + n^2 = p^m - 1$.

Ответ: $p = 3, m = 1, n = 1$.

Решение. Имеем $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$. Уравнение принимает вид $(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = p^m$.

Любой делитель p^m имеет вид p^k, где $k \geqslant 0$.

Если $n^2 - n + 1 = 1$, то $n = 1$ (поскольку $n > 0$). Отсюда $p = 3, m = 1$.

Иначе числа $(n^2 - n + 1)$ и $(n^2 + n + 1)$ делятся на p. Тогда и их разность $2n$ делится на p. Число $n^4 + n^2 + 1$ нечётное, так как числа n^4 и n^2 одинаковой чётности. Поэтому p^m нечётное число, откуда p также нечётно.

Итак, $2n$ делится на нечётное число p. Значит, n делится на p. Но тогда имеем: $1 = (n^2 - n + 1) - (n^2 - n)$ делится на p, что невозможно.