Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2015-2016 учебный год
9 класс
Максимальный балл – 35

Решение задач

1. Из молока жирностью 6% делают творог жирностью 22,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из тонны молока?

Ответ: 250 кг

Решение

Пусть получится x кг творога и 1000 – x кг сыворотки. Приравнивая количество жира в молоке и твороге с сывороткой, получим уравнение

$0{,}06\cdot 1000 = 0{,}225x + 0{,}005\,(1000 - x)$,

откуда $0{,}22x = 60 - 5 = 55$ и $x = \frac{55}{0{,}22} = 250$

Оценивание. За верное решение – 7 баллов. Если уравнение (или система уравнений) составлено верно, то ошибки в решении уравнения, то оценивается работа в 2-3 балла.

2. Вычислите сумму

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$$

Ответ: 5

Решение

Преобразуем общий член суммы

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})} =$$

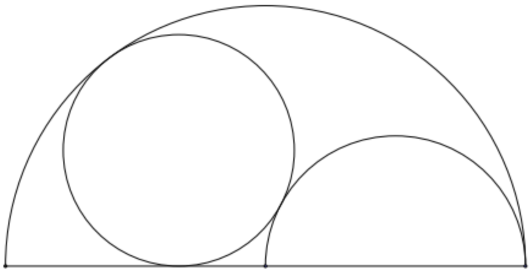
$$= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}.$$

Поэтому общая сумма равна

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{121}-\sqrt{119}) = \frac{1}{2}(\sqrt{121}-\sqrt{1}) = 5$$

Оценивание. За верное решение – 7 баллов.

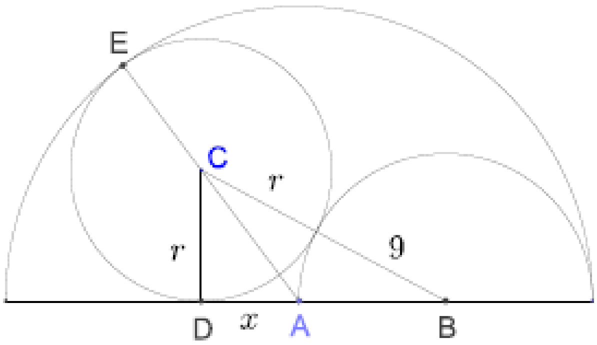
3. На рисунке изображены полукруг радиусом 18, полукруг радиусом 9 и круг, касающийся внутренним образом большого полукруга, внешним образом малого полукруга, а также диаметра большого полукруга. Найдите радиус этого круга.



Ответ: 8

Решение

Пусть A,B, C – соответственно центры большого полукруга, малого полукруга и круга, D – точка касания круга и диаметра полукруга, E – точка касания круга и большого полукруга.



Обозначим r = CD, x = DA. Поскольку центры касающихся окружностей и точка их касания лежат на одной прямой, CA = AE – CE = 18 – r, CB = r + 9. Применим теорему Пифагора к треугольникам CDA и CDB:

$$(18 - r)^2 = r^2 + x^2; \qquad (r + 9)^2 = r^2 + (x + 9)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим:

$$324 - x^2 = 36r; \qquad x^2 + 18x = 18r.$$

Легко исключить r из этого уравнения

$$3x^2 + 36x - 324 = 0.$$

Единственный положительный корень этого уравнения x = 6. Отсюда

$$18r = 36 + 108 = 144 \text{ и } r = 8$$

Оценивание. За верное решение – 7 баллов.

4. В танцевальном коллективе 10 юношей и 12 девушек. Сколько способов составить танцевальные пары (юноша – девушка) так, чтобы каждый участник коллектива входил в нечетное число пар?

Ответ: 2^{99}

Решение

Выделим самого высокого юношу A и самую высокую девушку B. Возьмем любого из 9 оставшихся юношей и любую из оставшихся девушек и примем решение, будут ли они составлять танцевальную пару. Всего получится 2^{99} возможных вариантов. Если какой-то юноша (не A) вошел в четное число пар. Заставим его также танцевать и с B, в противном случае он не будет партнером B. Если какая-то девушка (не B) вошла в четное число пар, заставим ее также танцевать и с А, в противном случае она не будет партнершей А. Теперь все, кроме А и В, входят в нечетное число пар. Пусть при этом у А оказалось 11 – x партнерш, а у В 9-y партнеров. Это означает, что среди 20 членов коллектива (отличных от А и В) ровно x юношей и y девушек входили в нечетное число пар. Числа x и y одинаковой четности(поскольку общее число пар можно найти, сложив число партнерш по всем юношам либо число партнеров по всем девушкам). Одинаковой четности будут и числа 11-x и 9-y. Если они четные, А и В составят танцевальную пару; если они четные, то не составят.

Оценивание. За верное решение – 7 баллов. Если решение аналогично авторскому, но не доказано, что x и y одинаковой четности – 5 баллов.

5. Существует ли многочлен степени 31 со старшим коэффициентом $\frac{1}{2015}$, который во всех целых точках принимает целые значения?

Ответ: да

Решение

Примером такого многочлена является многочлен

$$P(x) = \frac{1}{2015}x(x+1)(x+2)\dots(x+30)$$

Действительно, среди 31 последовательности целых чисел

$$x, x+1, x+2, \dots, x+30$$

найдется число, кратное 31, и числа, кратные 5 и 13. Поэтому их произведение кратно

$$31 \cdot 5 \cdot 13 = 2015.$$

Оценивание: за верное решение – 7 баллов