Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2015-2016 учебный год
11 класс
Максимальный балл – 35

1. У Васи имеется прибор «Делитель», который любую кучку песка делит на две равные кучки. Сможет ли Вася с помощью этого прибора из двух кучек песка массы 70 и 27 изготовить кучку массы 21?

Ответ: да.

Решение. Можно действовать, например, так:

70 → 35+35

35+27 =62 → 31+31

35+31 = 66 → 33+33

33+31 = 64 → 32+32

32 → 16 +16 → 8+8 → 4+4 → 2+2 → 1+1

16+4+1 =21

Замечание: возможны и другие решения.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. Ответ « да, может» без обоснования - 0 баллов.

2. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности и найдите её диаметр.

Ответ: диаметр равен ”a”.

Решение. Пусть O_1 и O_2 - центры окружностей, A,B,C и D - точки пересечения внутренних и внешних касательных, причем прямые AB и CD являются внешними касательными, а прямые AC и BD – внутренними. Заметим, что точка O_1 равноудалена от прямых AB и AC, и, значит, лежит на биссектрисе угла BAC. Аналогично проверятся, что точка O_2 лежит на биссектрисе угла, смежного углу BAC. Но биссектрисы смежных углов перпендикулярны. Поэтому треугольник O_1 O_2 A - прямоугольный. Поэтому его описанной окружностью является окружность с диаметром O_1 O_2 . Точно также проверяется, что и точки B,C и D лежат на той же окружности. Итак, четырехугольник ABCD вписан в окружность диаметра a.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. Правильный ответ без обоснования - 0 баллов.

3. Найдите все значения функции $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x$.

Ответ: [1/8, 1].

Решение. $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^4 - \sin^2 x \cos^2 x \cdot (4(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x)$. Пусть $t = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$. Тогда $f(x) = 1 - t \cdot (4 - 2t) = 1 - 4t + 2t^2 = g(t)$. Заметим, что $t = (\sin^2 2x)/4$, так что переменная t принимает значения на отрезке [0,1/4]. Но функция g на этом отрезке монотонно убывает. Поэтому она принимает значения на отрезке с концами g(0) = 1, g(1/4) = 1/8.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. Правильный ответ без полного обоснования - 1 балл.

4. Прямоугольный параллелепипед с ребрами длины 3, 4 и 5 спроектировали на плоскость. Найдите наибольшее возможное значение площади проекции.

Ответ: Корень из 769.

Решение. Проекция грани параллелепипеда на плоскость — параллелограмм, а проекция всего параллелепипеда состоит из трех таких параллелограммов, примыкающих друг к другу. Проведём в этих параллелограммах по одной диагонали — так, чтобы получился треугольник. Его площадь в два раза меньше площади фигуру, составленной из наших параллелограммов. Заметим, что этот треугольник есть проекция на плоскость треугольного сечения параллелепипеда, образованного диагоналями трех его смежных граней. Но при проектировании плоской фигуры на плоскость площадь фигуры уменьшается (либо сохраняется — в случае, когда плоскость фигуры параллельна плоскости проектирования). Поэтому площадь проекции будет максимальна, когда сечение параллельно плоскости проектирования (и в этом случае она равна удвоенной площади сечения). Осталось найти площадь сечения. По теореме Пифагора находим квадраты длин диагоналей граней: они равны 25, 34 и 41. Далее, по формуле Герона находим площадь сечения: после упрощений она равна «половине корня из 769 ».

Случай, когда проекция состоит из двух прямоугольников, фактически есть частный случай общего (просто один из параллелограммов спроектировался в отрезок), так что в этом случае площадь будет меньше.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. За приближенный ответ : баллы не снимать. Если не рассмотрен случай , когда проекция не является шестиугольником (хотя бы также коротко как в вышеприведенном решении) — снять один балл. За арифметические ошибки: снять один балл.

5. Конечно ли количество натуральных решений уравнения

$$2x^5 = 2015y^3 + 33z^7?$$

Ответ: Бесконечно.

Решение. Одно решение легко угадать: 2048 = 2015 + 33 при $x=4$, $y=z=1$. Отсюда получаем бесконечную серию решений : $x=4n^{21}$, $y=n^{35}$, $z=n^{15}$.

Оценивание: Полное решение — 7 баллов. Правильный ответ без обоснования - 0 баллов.