Школьный этап олимпиады по математике

Октябрь 2020 г.

10 класс

1 блок

1. Сколько способов выбрать из чисел 1, 2, 3, ..., 20 четыре разных числа так, чтобы среди них было поровну чётных и нечётных?

Ответ: 2025.

Решение. Два чётных числа выбираются $\frac{10\cdot9}{2} = 45$ способами. Столько же способов выбрать два нечётных числа.

2. Найдите минимальное расстояние от начала координат до точки окружности $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$.

Ответ: 4.

Решение. Пусть O — начало координат, B — центр окружности, A — точка пересечения окружности и отрезка OB. Тогда точка A находится на минимальном расстоянии от O среди всех точек окружности.

3. В десятичной записи числа $\dfrac{6}{17}$ стёрли первую цифру после запятой. Представьте получившееся число в виде несократимой дроби. В ответ запишите её числитель.

Ответ: 9.

Решение. $\dfrac{6}{17} = 0{,}35\ldots$. Операция, описанная в условии задачи, сводится к следующему преобразованию

$$\left(\frac{6}{17} - \frac{3}{10}\right) \cdot 10 = \frac{9}{17}.$$

4. Найдите наибольший корень уравнения

$$|x^2 + x - 2| + |x^2 - 4| = |x + 2|.$$

Ответ: 2.

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$|x+2|(|x-1| + |x-2|) = |x+2|.$$

Отсюда либо $x = -2$, либо $1 \leqslant x \leqslant 2$.

5. На гранях куба записаны (не обязательно различные) натуральные числа. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений оказалась равной равна 4042. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 92.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1 + x_2)(y_1z_1 + z_1y_2 + y_2z_2 + z_2y_1) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 4042.$$

Число $4042 = 2 \cdot 43 \cdot 47$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 2 + 43 + 47 = 92.$$

6. В ребусе

$$\mathbf{Б} > \mathbf{А} > \mathbf{К} > \mathbf{Т} > \mathbf{Е} > \mathbf{Р} > \mathbf{И} > \mathbf{О} < \mathbf{Л} > \mathbf{О} < \mathbf{Г}$$

разные буквы заменяют разные цифры. Сколько решений имеет ребус?

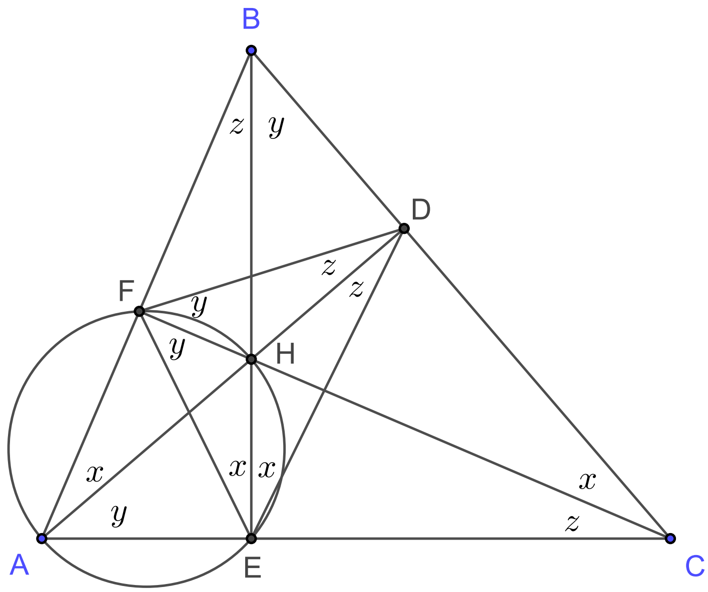
Ответ: 72.

Решение. В ребусе участвует все 10 цифр. Очевидно, что цифра **О** — самая маленькая (т. е. **О** $= 0$). Буквы **Л** и **Г** можно выбрать $9 \cdot 8 = 72$ способами, после чего оставшиеся 7 цифр размещаются по убыванию.

7. В треугольнике ABC с углами при вершинах A, B и C соответственно $31^\circ, 77^\circ, 72^\circ$ проведены высоты AD, BE и CD. Найдите угол DEF (в градусах).

Ответ: 26°.

Решение. Пусть углы треугольника ABC равны соответственно α, β и γ, H — точка пересечения высот, а $\angle BAH = x$ (см. рис.). Четырёхугольник $AFHE$ — описанный (в нём углы при противоположных вершинах F и E прямые). Поэтому $\angle FEH = \angle FAH = x$ (углы опираются на одну и ту же дугу). Кроме того, $\angle FCB = \angle BAD = x$ (оба угла дополняют $\angle B$ до прямого угла).



Аналогично получаем

$$\angle DAC = \angle EFC = \angle CFD = \angle EBC = y,$$

$$\angle ABE = \angle FDA = \angle ADE = \angle FCA = z.$$

Имеем $x+y=\alpha, y+z=\beta, z+x=\gamma$. Отсюда

$$x+y+z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ, \quad x=90^\circ-\beta, \angle FED=2x=180^\circ-2\beta.$$

8. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x*y=\frac{4x+2y}{xy+2}$. Найдите значение выражения

$$C=(\ldots((21*20)*19)*\ldots*2)*1.$$

Ответ: 2,5.

Решение. Заметим, что при любом числе $x\neq -1$ выполнено равенство $x*2=2$. Поэтому $C=2*1=\frac{10}{4}=2{,}5$.

2 блок

1. Сколько способов выбрать из чисел 1, 2, 3, …, 20 четыре разных числа так, чтобы среди них было поровну простых и составных?

Ответ: 1540.

Решение. Среди указанных чисел 8 простых и 11 составных (единица не является ни простым, ни составным числом). Два простых числа выбираются $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ способами. Два составных числа выбираются $\frac{11\cdot 10}{2} = 55$ способами.

2. Найдите максимальное расстояние от начала координат до точки окружности $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Ответ: 8.

Решение. Пусть O — начало координат, B — центр окружности, A — «дальняя» точка пересечения окружности и луча OB. Тогда точка A находится на максимальном расстоянии от O среди всех точек окружности.

3. В десятичной записи числа $\dfrac{3}{13}$ стёрли первую цифру после запятой. Представьте получившееся число в виде несократимой дроби. В ответ запишите её числитель.

Ответ: 4.

Решение. $\dfrac{3}{13} = 0{,}23\ldots$. Операция, описанная в условии задачи, сводится к следующему преобразованию

$$\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{10}\right) \cdot 10 = \frac{4}{13}.$$

4. Найдите наибольший корень уравнения

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 7x + 12| = |x - 4|.$$

Ответ: 4.

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$|x-4|(|x-2| + |x-3|) = |x-4|.$$

Отсюда либо $x = 4$, либо $2 \leqslant x \leqslant 3$.

5. На гранях куба записаны (не обязательно различные) натуральные числа. Для каждой вершины подсчитали произведение чисел, записанных на гранях, которым она принадлежит. Сумма вычисленных произведений оказалась равной равна 7198. Найдите сумму чисел на гранях куба.

Ответ: 122.

Решение. Пусть на одной паре противоположных граней записаны числа x_1 и x_2, на другой y_1 и y_2, на третьей z_1 и z_2. Тогда сумма произведений равна

$$(x_1 + x_2)(y_1 z_1 + z_1 y_2 + y_2 z_2 + z_2 y_1) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) = 7198.$$

Число $7198 = 2 \cdot 59 \cdot 61$ единственным образом (с точностью до порядка множителей) раскладывается в произедение трёх натуральных чисел, каждое из которых больше 1. Поэтому

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 2 + 59 + 61 = 122.$$

6. В ребусе

$$\mathbf{Р} > \mathbf{Е} > \mathbf{П} < \mathbf{Р} > \mathbf{О} > \mathbf{Д} > \mathbf{У} > \mathbf{К} > \mathbf{Ц} > \mathbf{И} > \mathbf{Я}$$

разные буквы заменяют разные цифры. Сколько решений имеет ребус?

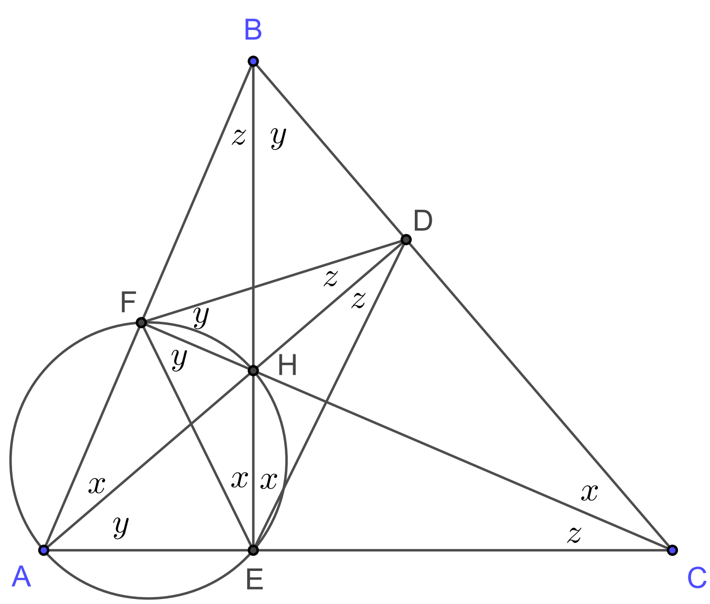
Ответ: 36.

Решение. В ребусе участвует все 10 цифр. Очевидно, что цифра **Р** — самая большая (т. е. **Р** $= 9$). Буквы **Е** и **П** можно выбрать $C_9^2 = 36$ способами, после чего их нужно расположить по убыванию. Оставшиеся 7 цифр также размещаются по убыванию.

7. В треугольнике ABC с углами при вершинах A, B и C соответственно $37°, 63°, 80°$ проведены высоты AD, BE и CD. Найдите угол DEF (в градусах).

Ответ: $24°$.

Решение. Пусть углы треугольника ABC равны соответственно α, β и γ, H — точка пересечения высот, а $\angle BAH = x$ (см. рис.). Четырёхугольник $AFHE$ — описанный (в нём углы при противоположных вершинах F и E прямые). Поэтому $\angle FEH = \angle FAH = x$ (углы опираются на одну и ту же дугу). Кроме того, $\angle FCB = \angle BAD = x$ (оба угла дополняют $\angle B$ до прямого угла).



Аналогично получаем

$$\angle DAC = \angle EFC = \angle CFD = \angle EBC = y,$$

$$\angle ABE = \angle FDA = \angle ADE = \angle FCA = z.$$

Имеем $x + y = \alpha, y + z = \beta, z + x = \gamma$. Отсюда

$$x + y + z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ, \quad x = 90^\circ - \beta, \angle FED = 2x = 180^\circ - 2\beta.$$

8. На множестве положительных чисел введём операцию $*$ по правилу $x * y = \frac{xy+x+3y}{x+y}$. Найдите значение выражения

$$C = (\ldots((20 * 19) * 18) * \ldots * 2) * 1.$$

Ответ: 2,25.

Решение. Заметим, что при любом числе $x \neq -2$ выполнено равенство $x * 2 = 3$. Поэтому $C = 3 * 1 = \frac{9}{4} = 2{,}25$.