Муниципальный этап областной олимпиады школьников
по математике
2019–2020 учебный год

Решения задач. Критерии оценивания

8 класс

1. Кран с холодной водой заполняет ванну за 19 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы горячей воды к моменту наполнения ванны налилось в два раза больше, чем холодной?

Ответ: 9.

Решение. Горячая вода должна заполнить 2/3 ванны. Это занимает $\frac{2}{3} \cdot 23 = \frac{46}{3}$ мин. Холодная вода должна заполнить 1/3 ванны, что требует $\frac{19}{3}$ мин. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на $\frac{46}{3} - \frac{19}{3} = 9$ мин дольше, чем кран с холодной водой.

Оценивание. За верное решение 7 б.

2. Можно ли число n записать в виде суммы нескольких натуральных чисел (их количество не меньше двух), произведение которых также равно n, если
а) $n = 2019$, б) $n = 57\,599$?

Ответ: а), б) да.

Решение. Составное число n представимо в виде $n = ab$, где $a, b \geqslant 2$. Если $a + b < ab$, то можно записать:

$$n = a + b + 1 + 1 + \ldots + 1,$$

где количество единиц равно $ab - (a + b)$, что и будет искомым представлением. Таким образом, нужно убедиться в том, что n — составное число. В случае а) это очевидно: $2019 = 3 \cdot 673$. В случае б) имеем:

$$57599 = 57600 - 1 = 240^2 - 1 = (240 - 1)(240 + 1) = 239 \cdot 241.$$

Оценивание. За верное решение 7 б. Если решён только один пункт, 3 б.

3. ABC — равнобедренный треугольник ($AB = BC$). На отрезке BC отмечена точка D, а на отрезке DC — точка E. Оказалось, что $DE = AE$, а $\angle EAC = \angle BAD$. Найдите величину угла BAE.

Ответ: $60°$.

Решение. Обозначим $\alpha = \angle EAC = \angle BAD$. Треугольник AED равнобедренный, поэтому равны углы EAD и EDA, положим $\beta = \angle EAD = \angle EDA$ (рис. 1).

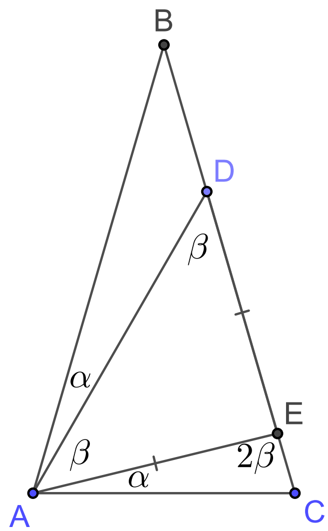

Рис. 1

Угол AEC — внешний для треугольника AED и равен сумме двух внутренних: $\angle AEC = 2\beta$. Кроме того, $\angle ACE = \angle CAE = 2\alpha + \beta$. Сложим угля треугольника AEC:

$$\alpha + 2\beta + (2\alpha + \beta) = 3(\alpha + \beta) = 180°.$$

Значит, $\angle BAE = \alpha + \beta = 60°$.

Оценивание. За верное решение 7 б.

4. Барон Мюнхгаузен написал на листке бумаги 100-значное число, разбил его запись на две части, в результате чего получилось два многозначных числа. Барон утверждает, что одно из этих чисел является квадратом второго. Не обманывает ли барон?

Ответ: обманывает.

Решение.

1-й способ. Пусть барон не обманывает, и меньшее из двух чисел равно n, а большее n^2. Если $n < 10^{33}$, то в десятичной записи числа n не более 33 цифр; при этом $n^2 < 10^{66}$, и запись этого числа содержит не более 66 цифр. Если же $n \geqslant 10^{33}$, то $n^2 \geqslant 10^{66}$, а в записях этих чисел не менее 34 и 67 цифр соответственно. В первом случае общее количество цифр не больше 99, а во втором — не меньше 101. Ровно ста цифр быть не может.

2-й способ. Пусть число n является k-значным. Это означает, что $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$. При этом $10^{2k-2} \leqslant n^2 < 10^{2k}$ — в числе n^2 количество цифр равно $2k-1$ или $2k$. Поэтому общее количество цифр в записи двух чисел равно $3k-1$ или $3k$; оно не может давать остаток 1 от деления на 3.

Оценивание. За верное решение 7 б.

5. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 19 точек. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Приведём два решения. В первом используется симметричная стратегия, а второе показывает, что это — игра-шутка: Боря выигрывает без всякой стратегии.

1-й способ. Точку, которую свои первым ходом покрасила Аня, обозначим A_0 (рис. 2). Боря, пропустив соседнюю с A_0 точку C, следующую за ней точку B_0 красит противоположным цветом. Теперь игроки не могут красить точку C (если не хотят сразу закончить игру проигрышем).

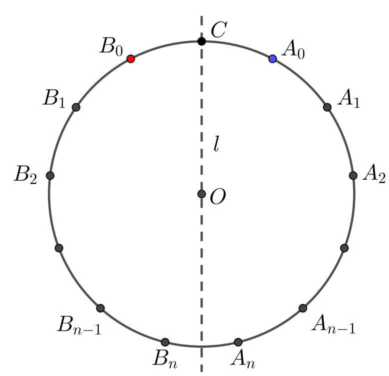

Рис. 2

Проведём прямую l через точку C и центр окружности. Непокрашенные точки, отличные от C, делятся на пары симметричных относительно этой прямой точек A_i, B_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а $n = 8$ (см. рис. 2). Дальнейшая стратегия Бори такова: в ответ на ход Ани он красит симметричную относительно l точку в противоположный цвет. В частности, если Аня красит точку A_n или B_n, то после хода Бори будет закрашена соседняя с ней точка (соответственно B_n или A_n), причём другим цветом. После каждого хода Бори незакрашенные точки располагаются симметрично относительно прямой l, а остальные точки на дугах A_0A_n и B_0B_n покрашены противоположным образом. Поэтому на любой ход Ани у Бори найдётся симметричный ответ. Значит, «последнее слово» останется за ним!

2-й способ. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны.

Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, то одну из них можно закрасить. Стало быть, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются.

Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное.

Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать ходов, ведущих к немедленному проигрышу.

Оценивание. За верное решение 7 б.