

Школьный этап олимпиады по математике

Сентябрь 2014 г.

10 класс

1 блок

1. (6 б.) Саша, Миша и Юра собирали грибы. Саша собрал грибов на 20% больше, чем Миша, но на 20% меньше, чем Юра. На сколько процентов Юра собрал грибов больше, чем Миша?

Ответ: 50.

Решение. Пусть количество грибов, собранных соответственно Мишей, Сашей и Юрой, равно соответственно x , y и z . Тогда, по условию, $y = 1,2x$ и $y = 0,8z$. Отсюда $z = \frac{y}{0,8} = \frac{1,2x}{0,8} = 1,5x$, т. е. Юра собрал на 50% грибов больше, чем Миша.

2. (6 б.) Найдите $x - y$, если $x^3 - y^3 = 71$, а $y^2x - x^2y = 18$.

Ответ: 5.

Решение. Обозначим $a = x - y$. Тогда $a^3 = x^3 - y^3 + 3xy(y - x) = 71 + 3 \cdot 18 = 125$. Отсюда $a = 5$.

3. (6 б.) Имеются два полукруга и четверть круга (рис. 1). Пусть b — площадь синего лепестка, y — площадь жёлтой фигурки.

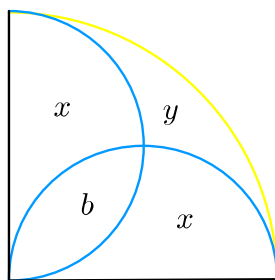


Рис. 1

Какое утверждение верно?

- 1) $b > y$;
- 2) $b < y$;
- 3) $b = y$.

Ответ: 3) $b = y$.

Решение. Пусть x — площадь фигурки, полученной из маленького полукруга удалением синего лепестка. Тогда площадь этого полукруга равна $x + b$, а площадь четверти круга $y + b + 2x$. Пусть также радиус полукруга r , тогда радиус четверти круга $2r$, а их площади соответственно равны $\frac{\pi r^2}{2}$ и $\frac{\pi \cdot (2r)^2}{4} = \pi r^2$. Площадь четверти круга оказалась в два раза больше площади маленького полукруга. Отсюда $y + b + 2x = 2(x + b)$, $y + b = 2b$, $y = b$.

4. (6 б.) Петя спустился вниз по движущемуся эскалатору за 60 сек. У Васи собственная скорость была вдвое больше, и на спуск ему потребовалось 40 сек. А Коля стоял на эскалаторе неподвижно. Через сколько секунд он спустился вниз?

Ответ: 120.

Решение. Пусть длина эскалатора s м, скорость эскалатора x м/с, собственная скорость Пети (т. е. скорость относительно эскалатора) y м/с. Тогда собственная скорость Васи $2y$ м/с. По условию,

$$60(x + y) = s; \quad 40(x + 2y) = s.$$

Отсюда $60(x + y) = 40(x + 2y)$, $20x = 20y$, $x = y$. Из первого уравнения имеем $120x = s$. Это означает, что Коля спускался 120 с.

5. (6 б.) При каком a уравнения $x^3 - ax + 2 = 0$ и $x^4 - ax^2 + 2 = 0$ имеют хотя бы один общий корень? Если таких значений a несколько, укажите наименьшее значение.

Ответ: 3.

Решение. Если x — общий корень уравнений, то $x^3 - ax = x^4 - ax^2$. Следовательно, $(x^2 - a)(x - x^2) = 0$. Отсюда $x^2 = a$, $x = 0$ или $x = 1$. Подстановка в исходные уравнения показывает, что первые два случая невозможны. Остаётся единственный вариант $x = 1$. Чтобы 1 была корнем, должно выполняться равенство $1 - a + 2 = 0$. Значит, $a = 3$.

6. (6 б.) Средний рост 6 волейболистов 195 см. Какое наибольшее количество из них может иметь рост больше 199 см?

Ответ: 5.

Решение. Если все 6 волейболистов выше 199 см, то и их средний рост будет больше 199 см. А вот пятеро могут быть выше 199 см, если шестой игрок достаточно невысок. Например, его рост 170 см, а все остальные имеют рост 200 см.

7. (6 б.) Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенной на основание, на отрезки длиной 5 см и 3 см, считая от вершины. Найдите площадь треугольника (в кв. см).

Ответ: 48.

Решение. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , D — середина основания, E — точка касания вписанной окружности и боковой стороны (рис. 2).

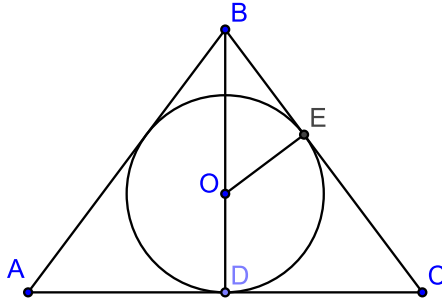


Рис. 2

Тогда $BO = 5$, $OD = 3$ и $OE = 3$. В прямоугольном треугольнике OEB по гипотенузе и катету находим другой катет: $BE = 4$. Прямоугольные треугольники BDC и BEO подобны (у них общий острый угол при вершине B). Поэтому $\frac{BC}{BO} = \frac{BE}{BD} = 2$ и $BC = 2BO = 10$. Отсюда $CE = 10 - 4 = 6$, $DC = CE = 6$ (равенство отрезков касательных) и $S_{ABC} = DC \cdot BD = 6 \cdot 8 = 48$.

8. (8 б.) Верёвочку сложили вдвое, затем ещё раз вдвое, после чего разрезали в каком-то месте. Какие-то два из получившихся кусков имеют длину 9 см и 4 см. Какую наименьшую длину (в см) может иметь верёвочка?

Ответ: 52.

Решение. При разрезании могут образоваться куски трёх различных длин x , $2x$ и y (рис. 3). Возможны четыре варианта:

$$x = 2, y = 9; \quad x = 4, y = 9; \quad y = 4, x = 9; \quad y = 4, x = 4,5.$$

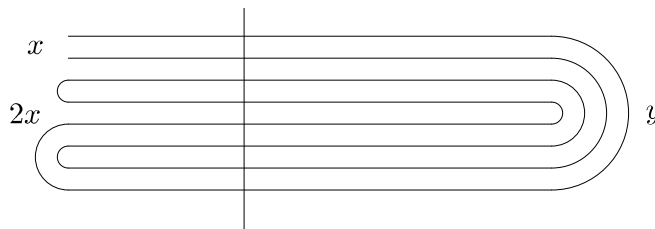


Рис. 3

Если L — длина всей верёвки, то $L = 8x + 4y$. Для указанных выше возможных вариантов значений x и y имеем соответственно $L = 52, 68, 88, 52$.

2 блок

1. (6 б.) Саша, Миша и Юра собирали грибы. Саша собрал грибов на 25% больше, чем Миша, но на 25% меньше, чем Юра. На сколько процентов Миша собрал грибов меньше, чем Юра?

Ответ: 40.

Решение. Пусть количество грибов, собранных соответственно Мишей, Сашей и Юрой, равно соответственно x , y и z . Тогда, по условию,

$y = 1,25z$ и $y = 0,75z$. Отсюда $x = \frac{y}{1,25} = \frac{0,75z}{1,25} = 0,6z$, т. е. Миша собрал на 40% грибов меньше, чем Юра.

2. (6 б.) Найдите $x + y$, если $x^3 + y^3 = 31$, а $x^2y + xy^2 = 11$.

Ответ: 4.

Решение. Обозначим $a = x + y$. Тогда $a^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 31 + 3 \cdot 11 = 64$. Отсюда $a = 4$.

3. (6 б.) Через центр окружности проведены ещё четыре окружности вдвое меньшего радиуса (рис. 4). Пусть b — общая площадь четырёх синих лепестков, y — общая площадь жёлтых фигурок.

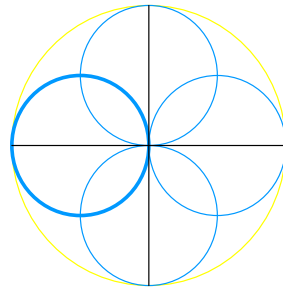


Рис. 4

Какое утверждение верно?

1) $b > y$;

2) $b < y$;

3) $b = y$.

Ответ: 3) $b = y$.

Решение. Проведём через центр большей окружности касательные к меньшим окружностям. Теперь видно, что задача сводится к аналогичной задаче из 1-го блока.

4. (6 б.) Петя спустился вниз по движущемуся эскалатору за 60 сек. У Васи собственная скорость была вдвое больше, и на спуск ему потребовалось 45 сек. А Коля стоял на эскалаторе неподвижно. Через сколько секунд он спустился вниз?

Ответ: 90.

Решение. Пусть длина эскалатора s м, скорость эскалатора x м/с, собственная скорость Пети (т. е. скорость относительно эскалатора) y м/с. Тогда собственная скорость Васи $2y$ м/с. По условию,

$$60(x + y) = s; \quad 45(x + 2y) = s.$$

Отсюда $60(x + y) = 45(x + 2y)$, $15x = 30y$, $x = 2y$. Тогда $x = \frac{x+2y}{2}$ — Коля спускался (относительно земли) вдвое медленнее Васи и затратил на спуск вдвое больше времени, т. е. 90 с.

5. (6 б.) При каком a уравнения $x^3 + ax + 1 = 0$ и $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ имеют хотя бы один общий корень? Если таких значений a несколько, укажите наименьшее значение.

Ответ: -2 .

Решение. Если x — общий корень уравнений, то $x^3 + ax = x^4 + ax^2$. Следовательно, $(x^2 + a)(x - x^2) = 0$. Отсюда $x^2 = -a$, $x = 0$ или $x = 1$. Подстановка в исходные уравнения показывает, что первые два случая невозможны. Остаётся единственный вариант $x = 1$. Чтобы 1 была корнем, должно выполняться равенство $1 + a + 1 = 0$. Значит, $a = -2$.

6. (6 б.) Средний рост 8 баскетболистов 195 см. Какое наибольшее количество из них может иметь рост меньше 191 см?

Ответ: 7.

Решение. Если все 8 баскетболистов ниже 191 см, то и их средний рост будет меньше 191 см. А вот семеро могут быть ниже 191 см, если восьмой игрок достаточно высок. Например, его рост 230 см, а все остальные имеют рост 190 см.

7. (6 б.) Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Найдите угол BAC (в градусах), если известно, что $AH = BC$.

Ответ: 45.

Решение. Пусть основания высот, проведённых из точек A и B соответственно D и E (рис. 5). Прямоугольные треугольники AHE и BHD подобны (углы при вершине H вертикальные). Поэтому $\angle HAE = \angle HBD$. Значит, подобными являются и треугольники AHE и BCE . Но у них, по условию, равные гипотенузы. Поэтому эти треугольники равны и $AE = BE$. Следовательно, треугольник AEB прямоугольный равнобедренный и $\angle BAC = \angle BAE = 45^\circ$.

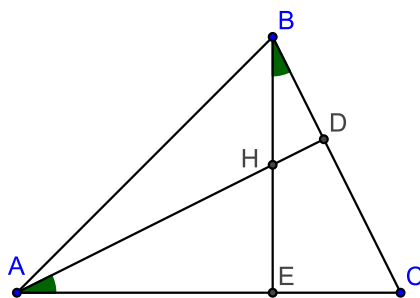


Рис. 5

8. (8 б.) Верёвочку сложили вдвое, затем ещё раз вдвое, после чего разрезали в каком-то месте. Какие-то два из получившихся кусков имеют длину 9 см и 4 см. Какую наибольшую длину (в см) может иметь верёвочка?

Ответ: 88.

Решение. См. решение аналогичной задачи из 1-го блока.