Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур

30 ноября 2008 г.

8 класс

1. Может ли быть верным равенство

$$\text{Р} \times \text{Е} \times \text{Ш} \times \text{И} = \text{С} \times \text{А} \times \text{М},$$

если в нём каждая буква заменяет некоторую цифру, причём разные буквы заменяют разные цифры?

2. В прямоугольном треугольнике один катет больше другого в два раза. Разрежьте этот треугольник на пять равных треугольников.

3. Пусть натуральные числа a, b и c таковы, что числа a^2+2b+1, b^2+2c+1 и c^2+2a+1 являются квадратами целых чисел. Следует ли отсюда, что $a = b = c$?

4. Найдите все натуральные числа n, обладающие следующим свойством: n равно сумме трёх различных натуральных делителей числа $n - 1$.

Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур

30 ноября 2008 г.

9 класс

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведённая из вершины прямого угла в 4 раза меньше гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

2. Числа $1, 2, 3, \ldots, 2008$ разбили на пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_{1004}, b_{1004}) так, что для каждого i разность $a_i - b_i$ равна 1 или 6. Какой цифрой оканчивается число, равное

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1004}) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{1004})?$$

3. Числа a, b и c — целые. Уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad (c-b)x^2 + (c-a)x + a + b = 0$$

имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что число $a + b + 2c$ делится на 3.

4. Плоскость раскрашена в 4 цвета (т. е. каждая точка плоскости покрашена в один из данных четырёх цветов, и для каждого цвета найдётся точка этого цвета). Докажите, что существует прямая, содержащая точки не менее чем трёх цветов.

Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур

30 ноября 2008 г.

10 класс

1. Пусть a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — его углы, а S — площадь. Докажите, что имеет место равенство

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^x = 3^y.$$

3. Найдите все действительные числа x, y, z и t такие, что

$$xy + \frac{1}{yz} = yz + \frac{1}{zt} = zt + \frac{1}{tx} = tx + \frac{1}{xy}; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 4; \quad x > z.$$

4. Имеется 16 монет, среди которых 4 фальшивых, не отличимых по виду от настоящих. Все настоящие монеты одного веса, все фальшивые монеты тоже одного веса, но другого. Как с помощью не более чем пяти взвешиваний на рычажных весах без гирь разделить монеты на четыре группы, в каждой из которых по одной фальшивой и три настоящих монеты?

Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур

30 ноября 2008 г.

11 класс

1. Найдите множество значений функции $y = \sin^3 x + \sin 3x$.

2. Существуют ли такие натуральные числа x, y, z и t такие, что

$$x \cdot 3^x + y \cdot 3^y + z \cdot 3^z = t \cdot 3^t?$$

3. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида, A_1, B_1, C_1, D_1 — центры окружностей, вписанных соответственно в грани BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что если отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются, то пересекаются и отрезки CC_1 и DD_1.

4. На плоскости отмечены 6 точек. Через каждые две из этих точек проведена прямая. Докажите, что данные прямые делят плоскость не более чем на а) 121; б) 100 частей.