Открытая областная олимпиада по математике

Очный тур 30 ноября 2008 г.

Решения задач

10 класс

1. Пусть a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — его углы, а S — площадь. Докажите, что имеет место равенство

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Доказательство. Пусть α, β, γ — углы, лежащие против сторон a, b и со- ответственно. Из теоремы косинусов вытекает, что $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, а из теоремы синусов, что $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$, где R — радиус описанной окружности. Отсюда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{(b^2+c^2-a^2)R}{abc}.$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{(c^2+a^2-b^2)R}{abc}, \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{(a^2+b^2-c^2)R}{abc}.$$

Сложим:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{(a^2+b^2+c^2)R}{abc}.$$

Осталось воспользоваться формулой $S = \dfrac{abc}{4R}$.

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^x = 3^y.$$

Ответ: $x = y = 1$.

Решение. После суммирования членов геометрической прогрессии получим уравнение

$$2^{x+1} - 1 = 3^y.$$

Правая его часть при любом натуральном y делится на 3. Легко проверить, что левая часть 2^{x+1} делится на 3 тогда и только тогда, когда $(x+1)$ — чётное число. Итак, для некоторого натурального m имеем $x + 1 = 2m$ и

$$2^{2m} - 1 = 3^y, \quad (2^m - 1)(2^m + 1) = 3^y.$$

Любый делитель степени тройки также является степенью тройки, т. е. для некоторых неотрицательных целых a и b имеем

$$2^m - 1 = 3^a, \quad 2^m + 1 = 3^b.$$

Отсюда $3^b - 3^a = 2$. В последовательности (неотрицательных целых) степеней тройки

$$1, 3, 9, 27, \ldots$$

только два первых числа отличаются на 2. Поэтому $b = 1, a = 0, y = 1, x = 1$.

3. Найдите все действительные числа x, y, z и t такие, что

$$xy + \frac{1}{yz} = yz + \frac{1}{zt} = zt + \frac{1}{tx} = tx + \frac{1}{xy}; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 4; \quad x > z.$$

Ответ: $x = y = 1, z = t = -1; \quad x = z = 1, y = t = -1$.

Решение. Из условия задачи легко получаются следующие соотношения:

$$y(x - z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{y - t}{ty}, \tag{1}$$

$$z(y - t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{z - x}{xz}, \tag{2}$$

$$t(z - x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{t - y}{ty}, \tag{3}$$

$$x(t - y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{x - z}{xz}. \tag{4}$$

Поскольку $x \neq z$, из (1) вытекает, что $y \neq t$. Поделив (1) на (3), а (2) на (4), получим соответственно

$$\frac{y}{t} = \frac{x}{z}, \quad \frac{z}{x} = \frac{y}{t}. \tag{5}$$

Значит, $\dfrac{x}{z} = \dfrac{z}{x}$, $x^2 = z^2$, $x = \pm z$. Так как $z \neq x$, получаем, что $z = -x$. Из (5) теперь вытекает, что $t = -y$. Подставив найденные выражения для z и t в исходные уравнения, получим

$$xy - \frac{1}{xy} = -xy + \frac{1}{xy} = xy - \frac{1}{xy} = -xy + \frac{1}{xy}.$$

Отсюда $2xy = \dfrac{2}{xy}$, $xy = \pm 1$.

Итак, все решения системы уравнений в предположении $x \neq z$ имеют вид

$$x = a, \quad y = \pm\frac{1}{a}, \quad z = -a, \quad t = \mp\frac{1}{a},$$

где a — произвольное число, не равное нулю.

Вспомним про неравенство $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leqslant 4$. Теперь оно принимает вид

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + a^2 + \frac{1}{a^2} \leqslant 4,$$

или $a^2 + \dfrac{1}{a^2} \leqslant 2$, что равносильно $\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 \leqslant 0$. Отсюда $a = \dfrac{1}{a}$ и $a = \pm 1$. Условие $x > z$ оставляет всего две четвёрки чисел, удовлетворяющих условию задачи.

4. За 5 взвешиваний разделить 16 монет, из которых 4 - фальшивые, на четыре одинаковых кучки.

Решение.

2 из 8. Сначала решим более простую задачу: за два взвешивания разделить 8 монет, из которых 2 – фальшивые, на две равные кучки.

Разобьем монеты на 4 пары А, Б, В и Г.

8-1 (первое взвешивание) . Сравним четверки А+Б и В+Г. В случае равенства задача решена. В случае неравенства:

8-2 (второе взвешивание). Сравним четверки А+В и Б+Г. В случае равенства задача решена. Но в случае неравенства задача тоже решена! Действительно, два «неравенства» означают, что в каждой паре монеты одинаковые. Поэтому искомые кучки можно сформировать, взяв по одной монете из каждой пары.

4 из 16.

Первое взвешивание: сравним 8 и 8.

а) Равенство. Тогда каждая восьмерка содержит ровно 2 фальшивые монеты, и, по алгоритму «2 из 8», за два взвешивания может быть разделена на две равные кучки. Всего потребуется $1+2\cdot2=5$ взвешиваний.

б) Неравенство. Разобьем «тяжелую» восьмерку на четверки P и Q , «легкую» восьмерку – на четверки R и S .

Второе и третье взвешивания: сравним четверки P и Q, R и S. Возможны (с точностью до переобозначений) четыре исхода:

1. P>Q, R>S
2. P>Q, R=S
3. P=Q, R>S
4. P=Q, R=S

1. P>Q, R>S. Возможны следующие варианты распределения фальшивых монет по четверкам (см. таблицу; в графе «вес» указан «относительный» вес фальшивой монеты: Т означает, что фальшивая монета тяжелее настоящей, Л – легче)

Номер варианта	Вес	P	Q	R	S
1.1	Т	3	0	1	0
1.2	Т	2	1	1	0
1.3	Л	0	1	1	2
1.4	Л	0	1	0	3

Четвертое взвешивание- (вариант 1) : сравним P+S и Q+R

1а). P+S > Q+R. Это - вариант 1.1. Разобьем четверку P на две пары, и сравним их (пятое взвешивание). Тогда в более тяжелой паре обе монеты фальшивые, а в более легкой – одна. Заменим одну монету из «тяжелой» пары на (настоящую!) монету из пары Q, а другую –на (тоже настоящую) монету из пары S. Получили четыре искомых кучки.

1б). P+S < Q+R. Это – вариант 1.4, «симметричный» варианту 1.1, и далее действуем аналогично: делим четверку S на две пары, сравниваем их, и в более легкой паре заменяем одну монету монетой из четверки P, а другую – монетой из четверки R.

1в).). P+S = Q+R. Это – варианты 1.2 или 1.3. Значит, четверки Q и R - правильные, а четверки P и S – нет. Но тогда взвешивание 8-2 позволяет сделать из этих двух «неправильных» четверок две «правильные».

2. P>Q, R=S. Значит, в восьмерке R+S четное число фальшивых. Но P+Q>R+S, P>Q. Значит, в четверках R и S все монеты настоящие, фальшивые монеты – тяжелее настоящих, и в четверке P либо 4, либо 3 фальшивые монеты. Разобьем четверку P на две пары P1 и P2, и сравним их (пятое взвешивание).

2.1. $P1=P2$. Значит, все монеты из четверки P – фальшивые, и все легко.
2.2. $P1>P2$. Значит, в четверке P – три фальшивые монеты (и тогда четверка Q – правильная), в паре $P1$ две фальшивые, в паре $P2$ – одна. Искомые кучки теперь строятся как в п.1а) .
2.3. $P1>P2$. Аналогично п.2.2.

3. $P=Q$, $R>S$. Аналогично п.2 (фальшивые –легче, в четверках P и Q нет фальшивых; делим четверку S на две пары, и т.д.)
4. $P=Q$, $R=S$. Так как $P+Q>R+S$, то $P>R$ и $Q>S$. Тогда каждая из восьмерок $P+R$ и $Q+S$ содержит по две фальшивые монеты, и взвешивание 8-2 позволяет каждую из них разделить на две правильные кучки (всего будет $1+2+2\cdot 1=5$ взвешиваний).