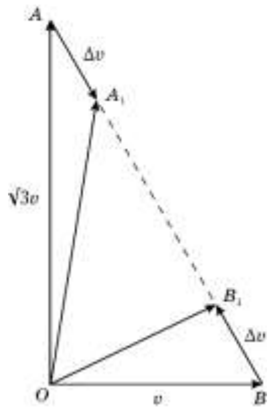
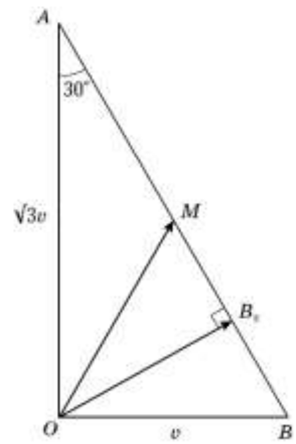
## 10.1. Просто трение

**Возможное решение**




Рассмотрим векторы начальных скоростей бруска и фанеры и их изменения за некоторый малый промежуток времени $\Delta t$. На рисунке вектор $OA$ соответствует скорости бруска, вектор $OB$ скорости фанеры в начальный момент времени. Векторы изменений их скоростей равны по модулю (так как массы равны) и направлены вдоль вектора их относительной скорости $AB$ (скорость бруска относительно фанеры – вектор $AB$, а сила трения, действующая на брусок направлена от $A$ к $B$ и наоборот для листа фанеры).




Через время $\Delta t$ концы векторов новых скоростей $OA_1$ и $OB_1$, по-прежнему лежат на $AB$ и силы трения, действующие на тела, по-прежнему направлены вдоль $AB$. Скорости бруска и фанеры будут изменяться до тех пор, пока не выровняются по величине и направлению, а точки $A_1$ и $B_1$ не окажутся на середине $AB$. Дальнейшее очевидно из геометрии. Скорость бруска уменьшается, пока не достигнет постоянного значения $OM$, $OM = AB/2 = \upsilon$. Минимальная скорость листа фанеры достигается прежде, чем скорости установятся – длина вектора $OB_2$ равна $OB_2 = OA\sin 30^\circ = \sqrt{3}\upsilon/2$.

Таким образом, минимальная скорость бруска относительно льда при движении равна $\upsilon$, а фанеры, соответственно $\sqrt{3}\upsilon/2$.

## 10.2. Расталкивание

**Возможное решение**

1. После первого столкновения скорость правого бруска $u_1 = 2m\upsilon/(M+m) = \upsilon/2$, скорость тележки $\upsilon_1 = \upsilon(m - M)/(M+m) = -\upsilon/2$ (из законов сохранения энергии и импульса). Знак минус означает, что тележка начнёт двигаться влево.

2. Из законов сохранения энергии и импульса при столкновении с левым бруском получим, что тележка будет двигаться вправо со скоростью $\upsilon/4$. А скорость правого бруска после второго столкновения с тележкой станет $\upsilon_2 = \upsilon/8 = \upsilon_1/4$. Соответственно $\upsilon_3 = \upsilon_2/4$ и т.д.

3. А) Кинетические энергии правого бруска будут изменяться также в геометрической прогрессии. но с показателем 1/16. Отсюда можно найти полное перемещение правого бруска, а затем и левого.

Б) Можно заметить, что после каждого столкновения отношение кинетических энергий правого и левого брусков остаётся одинаковым и равным 4, тогда $L_{\text{Лев}} = L_{\text{Прав}}/4$. С учётом работы силы трения имеем $m\upsilon^2/2 = \mu Mg\left(L_{\text{Лев}} + L_{\text{Прав}}\right)$, а так как $m = M/3$, то $L_{\text{Прав}} = 2\upsilon^2/(15\mu g)$ и и $L_{\text{Лев}} = \upsilon^2/(30\mu g)$.

**10.3. Из глубины...**

**Возможное решение**

Массу пузырька воздуха можно не учитывать, поэтому сила $F$ сопротивления движению равна силе Архимеда $F_A$: $F = F_A$, или иначе: $kr\upsilon = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$.

Отсюда найдём $\upsilon = \frac{4\pi}{3}\frac{r^2\rho g}{k}$.

В соответствии с законом Бойля-Мариотта ($pV$ = const) запишем:

$$\frac{4\pi}{3} r_0^3 \left(p_0 + \rho g h_0\right) = \frac{4\pi}{3} r^3 \left(p_0 + \rho g h\right).$$

Зависимость радиуса пузырька от глубины такова:

$$r = r_0 \left(\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h}\right)^{1/3}.$$

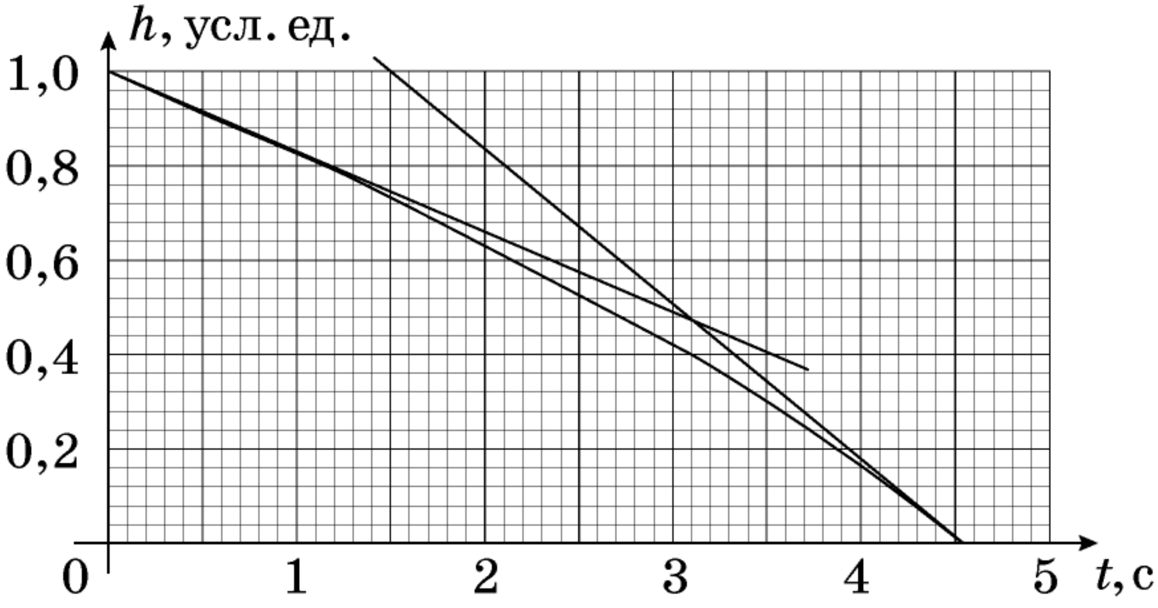
Откуда

$$\upsilon = \frac{4\pi\rho g r_0^2}{3k}\left(\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h}\right)^{2/3}.$$

Скорости пузырька вблизи дна $\upsilon\left(h_0\right)$ и у поверхности $\upsilon\left(0\right)$ относятся как

$$\frac{\upsilon\left(0\right)}{\upsilon\left(h_0\right)} = \left(\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0}\right)^{2/3}.$$

Отношение скоростей можно определить через отношение угловых коэффициентов касательных, проведенных к графику зависимости $h(t)$ в соответствующих точках. Для нашего графика (данного в условии)




$$\frac{\upsilon(0)}{\upsilon(h_0)} \approx 1{,}8;$$

$$\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0} \approx 2{,}4;$$

$$h_0 \approx 14 \text{ м.}$$

Для ответа на второй вопрос задачи достаточно заметить, что на любой глубине скорость пузырька, пропорциональна квадрату его начального радиуса. Соответственно, для пузырька с начальным радиусом 0,5 мм скорость будет в четыре раза меньше, чем для пузырька радиусом $r_0$ = 1 мм, а время движения будет в четыре раза больше, то есть примерно 18 с.

При ответе на третий вопрос задачи найдем радиус пузырька, имевшего $r_0$ = 1 мм на глубине 14 м, когда он достигнет глубины 10 м.

$$r_0^{'} = r_0\left(\frac{p_0 + \rho g h_0}{p_0 + \rho g h}\right)^{1/3} = r_0\left(\frac{24}{20}\right)^{1/3}$$

Такой же пузырек в соответствие с графиком движется от глубины 10 м до поверхности $t'$ = 2,9 с. Пузырек, имеющий на этой глубине радиус $r_0$ = 1 мм будет двигаться в $\left(\frac{r_0^{'}}{r_0}\right)^2$ раз медленнее, то есть достигнет поверхности за время

$$t = t^{'}\left(\frac{r_0^{'}}{r_0}\right)^2 \approx 3{,}3 \text{ с.}$$

**10.4. Частичный нагрев**

**Возможное решение**

1. Пусть $S$ сечение цилиндров, ν полное число молей газа, $R$ газовая постоянная. Из уравнения состояния идеального газа для начальной ситуации имеем: $2p_oSL = \nu RT_o$.
2. При открытом вентиле давление газа слева и справа одинаково, обозначим его $p$.
3. Из уравнения состояния в применении к каждому цилиндру при открытом вентиле и разных температурах имеем: $pSL = \nu_1RT_o$; $pSL = \nu_2RT$, где $\nu_1$ и $\nu_2$ число молей слева и справа.
4. Так как суммарное число молей неизменно, то $\nu = \nu_1 + \nu_2$.
5. Отсюда выражаем давление $p = 2p_oT/(T + T_o)$.
6. После закрытия вентиля число молей газа слева и справа остаются прежними. В конце температура везде $T_o$, а объёмы газа слева и справа соответственно $(L + h)S$ *и* $(L – h)S$.
7. Разница давлений газа при перепаде уровней $p_1 – p_2 = 2\rho gh$.
8. Выразим давления через уравнение состояния и предыдущие соотношения:
   $\nu_1RT_o/(L + h)S – \nu_2RT_o/(L – h)S = pL/(L + h) – pLT_o/T(L – h) = 2\rho gh$.
9. Подставив $p = 2p_oT/(T + T_o)$ получим уравнение для искомой $T$:
   $p_oLT/(T + T_o)(L + h) – p_oLT_o/(T + T_o)(L - h) = \rho gh$.
10. Откуда $T = T_o(L + h)(p_oL + \rho gh(L – h))/(L – h)(p_oL – \rho gh(L + h))$.

**10.5. Нелинейная электрическая цепь**

**Возможное решение**

Каждый диод может быть открыт или закрыт. Всего возможны три варианта:

а) оба диоды закрыты;

б) один диод закрыт (например, $D_1$), другой ($D_2$) отрыт;

в) оба диоды открыты.

Случай (а) $U_{AD} = U_{DC} = U_{CB} = U_{AB}/3$. $U_{AC} = U_{AD} + U_{DC} > U_0$ – не подходит.

Случай (б) $U_{DB} = 1\ В$; $U_{DC} = U_{CB} = 0,5\ В$; $U_{AC} = 4,5\ В > U_0$ – не подходит.

Случай (в) $U_{AC} = U_{AD} = U_0 = 1\ В$.

$U_1 = U_3 = U_{AB} - U_0 = 4\ В$.

$U_2 = U_{AB} - 2U_0 = 3\ В$.

$I_{D1} = I_{D2} = I_{N3} + I_{N2} = kU_3^2 + kU_2^2 = 2,5\ А$.