7 класс

Блок 1.

1. Найти наименьшее нечетное трехзначное число, которое делится на 3. *(8 баллов)*
   Ответ: 105.
   Решение: Наименьшее трехзначное число делящееся на 3 это 102, но оно кратно 2. Следующее число, делящееся на 3 это 105, оно удовлетворяет условию задачи.

2. Из пунктов А и Б навстречу друг другу выехали 2 автомобиля со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Через сколько минут они встретятся, если расстояние между пунктами 270 км? *(10 баллов)*
   Ответ: 180.
   Решение: Скорость сближения автомобилей равна 40 км/ч + 50 км/ч = 90 км/ч. Тогда автомобили встретятся через 270 км : 90 км/ч = 3 ч = 180 минут.

3. 3 карандаша и 4 ручки стоят 250 рублей, а 2 карандаша и 2 ручки 140 рублей. Сколько стоит один карандаш? *(10 баллов)*
   Ответ: 30.
   Решение: 4 карандаша и 4 ручки будут стоить 140 р $\cdot\, 2 = 280$ р, а 3 карандаша и 4 ручки по условию стоят 250 р. Отсюда следует, что 1 карандаш стоит 280 р $- 250$ р $= 30$ рублей.

4. Деревянный кубик с ребром 4 см окрасили в красный цвет со всех сторон, а затем распилили на одинаковые кубики с ребром 1 см. Сколько получилось маленьких кубиков ровно с одной красной гранью? *(12 баллов)*
   Ответ: 24.
   Решение: При распиливании окрашенного со всех сторон кубика получаются кубики 4 типов: неокрашенные – находящиеся внутри, с одной окрашенной гранью – находящиеся внутри грани, с двумя – находящиеся на ребрах и с тремя – находящиеся в вершинах. Каждая грань большого куба является квадратом 4 на 4. Кубики, расположенные по периметру квадрата, окрашены более чем с одной стороны. Поэтому на каждой грани $2 \cdot 2 = 4$ нужных кубика, всего граней 6 и тогда кубиков ровно с одной красной гранью $6 \cdot 4 = 24$.

5. Найти предпоследнюю цифру числа 2021^{2020}. *(13 баллов)*
   Ответ: 0.
   Решение: При перемножении натуральных чисел на две последние цифры произведения влияют только две последние цифры множителей.

$$21^1 = 21$$
$$21^2 = ...41$$
$$21^3 = ...61$$
$$21^4 = ...81$$
$$21^5 = ...01$$
$$21^6 = ...21$$

   Заметим, что две последние цифры начинают повторяться с циклом длины 5. Так как 2020 делится на 5, то две последние цифры числа 21^{2020} будут такие же как у 21^5, значит предпоследняя цифра равна 0.

6. В большом ящике лежат шарики разных цветов: 5 красных, 6 оранжевых, 7 желтых, 8 зеленых, 9 голубых, 10 синих и 11 фиолетовых. Шарики вынимают из ящика в полной темноте. Какое минимальное число шариков нужно достать, чтобы среди них гарантированно нашлось 8 шариков одного цвета? *(13 баллов)*
   Ответ: 47.
   Решение: Возьмем максимальное число шаров каждого цвета, меньшее чем восемь. Будет взято $5 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 46$ шариков. Добавление любого шарика даст восьмерку шариков какого-то цвета.

7. У пяти братьев 100000 рублей. У первого и второго братьев 46000 рублей, у второго и третьего — 50000 рублей, у третьего и четвертого — 36000 рублей, у четвертого и пятого — 37000 рублей. Сколько денег у первого, третьего и пятого братьев вместе? *(14 баллов)*
   Ответ: 48000.
   Решение: Сложим количество денег у первого и второго, второго и третьего, третьего и четвертого, четвертого и пятого братьев и вычтем из этого количество денег у всех пяти братьев вместе, получим, что у второго, третьего и четвертого брата вместе 69000 рублей. Сложим количество денег у первого и второго, четвертого и пятого братьев и вычтем это из общего количества денег у пяти братьев, понимаем, что у третьего брата 17000 рублей. Тогда вычтем из общей суммы денег пяти братьев количество денег у второго, третьего и четвертого брата и прибавим количество денег у третьего брата. Получим, что у первого, третьего и пятого братьев вместе 48000 рублей.

8. Имеется 9 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на каждой карточке ровно одна из имеющихся цифр, переворачивать карточки нельзя). Сколько семизначных чисел можно составить из этих карточек, если карточки с номерами 1 и 3 не стоят рядом? *(20 баллов)*
   Ответ: 151200.
   Решение: Посчитаем количество таких чисел как разность между количеством всех возможных семизначных чисел и количеством семизначных чисел, в которых 1 и 3 стоят рядом. Количество всех возможных семизначных чисел, которые можно составить из карточек равно $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181440$, потому что на первую позицию в числе мы можем поставить одну из 9 карточек, на вторую – одну из 8 оставшихся, на третью – из 7 и так далее. Теперь найдем количество чисел, в которых 1 и 3 стоят рядом. Понимаем, что у нас есть 6 вариантов расположения этой пары цифр в числе, причем в каждой паре цифры можно расставить двумя разными способами (либо 13, либо 31). На первую из оставшихся семи позиций мы можем поставить одну из 7 карточек, на вторую – одну из 6 и так далее. Значит таких чисел будет ровно $6 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 30240$. Тогда количество искомых чисел будет равно $181440 - 30240 = 151200$.

Блок 2.

1. Найти наибольшее четное двузначное число, которое делится на 3. *(8 баллов)*
   Ответ: 96.
   Решение: Наибольшее двузначное число делящееся на 3 это 99, но оно не кратно 2. Предыдущее число, делящееся на 3 это 96, оно удовлетворяет условию задачи.

2. Из пунктов А и Б навстречу друг другу выехали 2 автомобиля со скоростями 70 км/ч и 50 км/ч. Через сколько минут они встретятся, если расстояние между пунктами 300 км? *(10 баллов)*
   Ответ: 150.
   Решение: Скорость сближения автомобилей равна 70 км/ч + 50 км/ч = 120 км/ч. Тогда автомобили встретятся через 300 км : 120 км/ч = 2.5 ч = 150 минут.

3. Карандаш стоит 30 рублей, а ручка 80 рублей. Маша купила ручек и карандашей к новому учебному году для класса на 1000 рублей. Какое наибольшее количество карандашей могла купить Маша, если она потратила все деньги полностью? *(10 баллов)*
   Ответ: 28.
   Решение: Маша не могла купить карандаши на все деньги, так как 1000 не делится нацело на 30. Значит Маша купила хотя бы одну ручку, 1000 р − 80 р = 920 р не делится нацело на 30, а 1000 р − $2 \cdot 80$ р = 840 р делится, тогда Маша купила ровно 840 р : 30 р = 28 карандашей.

4. Деревянный кубик с ребром 4 см окрасили в красный цвет со всех сторон, а затем распилили на одинаковые кубики с ребром 1 см. Сколько получилось маленьких кубиков ровно с двумя красными гранями? *(12 баллов)*
   Ответ: 24.
   Решение: При распиливании окрашенного со всех сторон кубика получаются кубики 4 типов: неокрашенные – находящиеся внутри, с одной окрашенной гранью – находящиеся внутри грани, с двумя – находящиеся на ребрах и с тремя – находящиеся в вершинах. Каждая грань большого

куба является квадратом 4 на 4. Нам подходят кубики, расположенные по периметру квадрата и не находящиеся в вершинах куба. Поэтому на каждой грани $2 \cdot 4 = 8$ нужных кубиков. Всего граней 6, причем каждый кубик мы учли дважды, тогда кубиков с двумя красными гранями $6 \cdot 8 : 2 = 24$.

5. Найти предпоследнюю цифру числа 4041^{3456}. *(13 баллов)*
Ответ: 4.
Решение: При перемножении натуральных чисел на две последние цифры произведения влияют только две последние цифры множителей.

$$41^1 = 41$$

$$41^2 = ...81$$

$$41^3 = ...21$$

$$41^4 = ...61$$

$$41^5 = ...01$$

$$41^6 = ...41$$

Заметим, что две последние цифры начинают повторяться с циклом длины 5. Так как 3456 дает остаток 1 при делении на 5, то две последние цифры числа 41^{3456} будут такие же как у 41^1, значит предпоследняя цифра равна 4.

6. В большом ящике лежат шарики разных цветов: 6 красных, 6 оранжевых, 7 желтых, 7 зеленых, 8 голубых, 8 синих и 9 фиолетовых. Шарики вынимают из ящика в полной темноте. Какое минимальное число шариков нужно достать, чтобы среди них гарантированно нашлось 7 шариков разных цветов? *(13 баллов)*
Ответ: 46.
Решение: Возьмем максимальное возможное число шаров шести цветов. Будет взято $6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 = 45$ шариков. Добавление любого шарика даст семерку шариков разных цветов.

7. У пяти одноклассников 90 конфет. У первого и второго одноклассников 40 конфет, у второго и третьего — 29 конфет, у третьего и четвертого — 30 конфет, у четвертого и пятого — 37 конфет. Сколько конфет у второго и четвертого одноклассников вместе? *(14 баллов)*
Ответ: 33.
Решение: Сложим количество конфет у первого и второго, второго и третьего, третьего и четвертого, четвертого и пятого одноклассников и вычтем из этого количество конфет у всех пяти одноклассников вместе, получим, что у второго, третьего и четвертого одноклассника вместе 46 конфет. Сложим количество конфет у первого и второго, четвертого и пятого одноклассников и вычтем это из общего количества конфет у пяти одноклассников, понимаем, что у третьего одноклассника 13 конфет. Тогда вычтем из общего количества конфет второго, третьего и четвертого одноклассника количество конфет у третьего одноклассника. Получим, что у второго и четвертого одноклассников вместе 33 конфеты.

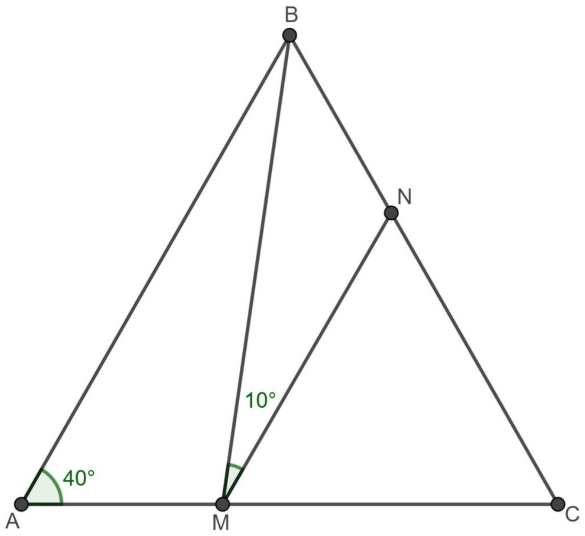
8. Имеется 9 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на каждой карточке ровно одна из имеющихся цифр, переворачивать карточки нельзя). Сколько семизначных чисел можно составить из этих карточек, если цифры 1 и 3 обязательно присутствуют в числе, причем 1 занимает одно из первых четырех мест, а 3 одно из последних четырех мест? *(20 баллов)*
Ответ: 37800.
Решение: Поймем, сколькими способами можно разместить цифры 1 и 3 в искомом числе. Если 1 стоит на одном из первых трех мест, то у нас есть 4 варианта как поставить цифру 3, если же 1 стоит на четвертом месте, то у нас есть 3 варианта как поставить цифру 3. Значит всего вариантов размещения цифр 1 и 3 будет $4+4+4+3 = 15$. На первую из оставшихся семи позиций мы можем поставить одну из 7 карточек, на вторую – одну из 6, на третью – одну из 5 и так далее. Значит таких чисел будет ровно $15 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 37800$.

8 класс

Блок 1.

1. 15 леденцов стоят 12 рублей. Во сколько рублей обойдутся 40 леденцов? *(8 баллов)*
   Ответ: 32.
   Решение: Если 15 леденцов стоят 12 рублей, то 1 леденец будет стоить 12 р : 15 = 0.8 р, значит 40 леденцов обойдутся в 0.8 р $\cdot$ 40 = 32 рубля.

2. *(10 баллов)*



$AB = BC, MN = MC$
$\angle MBN - ?$

   Ответ: 30°.
   Решение: Так как $AB = BC, MN = MC$, то $\triangle ABC$, $\triangle MNC$ - равнобедренные. Тогда по свойству равнобедренного треугольника $\angle BAC = \angle BCA = \angle CNM = 40°$. Тогда по теореме о внешнем угле треугольника для $\triangle MNB$ и угла $\angle MNC$: $\angle MBN + \angle NMB = \angle MNC = 40°$ значит $\angle MBN = \angle MNC - \angle NMB = 40° - 10° = 30°$.

3. 3 карандаша и 4 ручки стоят 250 рублей, а 2 карандаша и 2 ручки 140 рублей. Сколько стоит один карандаш? *(10 баллов)*
   Ответ: 30.
   Решение: 4 карандаша и 4 ручки будут стоить 140 р $\cdot$ 2 = 280 р, а 3 карандаша и 4 ручки по условию стоят 250 р. Отсюда следует, что 1 карандаш стоит 280 р − 250 р = 30 рублей.

4. Деревянный кубик с ребром 5 см окрасили в красный цвет со всех сторон, а затем распилили на одинаковые кубики с ребром 1 см. Сколько получилось маленьких кубиков ровно с одной красной гранью? *(12 баллов)*
   Ответ: 54.
   Решение: При распиливании окрашенного со всех сторон кубика получаются кубики 4 типов: неокрашенные – находящиеся внутри, с одной окрашенной гранью – находящиеся внутри грани, с двумя – находящиеся на ребрах и с тремя – находящиеся в вершинах. Каждая грань большого куба является квадратом 5 на 5. Кубики, расположенные по периметру квадрата, окрашены более чем с одной стороны. Поэтому на каждой грани $3 \cdot 3 = 9$ нужных кубика, всего граней 6 и тогда кубиков ровно с одной красной гранью $6 \cdot 9 = 54$.

5. Прямая $y = kx + b$ симметрична прямой $2x + y + 2 = 0$ относительно точки M$(-1; 2)$. Найти значение выражения $k - 2b$. *(13 баллов)*
   Ответ: -6.
   Решение: Отметим на данной прямой две точки A$(-1; 0)$ и B$(-2; 2)$, тогда искомая прямая

проходит через $A_1(-1;4)$ и $B_2(0;2)$, образы этих точек, полученные при симметрии относительно точки $M(-1;2)$. Значит уравнение искомой прямой $y=-2x+2$. Тогда $k-2b=-2-2\cdot 2=-6$.

6. В большом ящике лежат шарики разных цветов: 5 красных, 6 оранжевых, 7 желтых, 8 зеленых, 9 голубых, 10 синих и 11 фиолетовых. Шарики вынимают из ящика в полной темноте. Какое минимальное число шариков нужно достать, чтобы среди них гарантированно нашлось 8 шариков одного цвета? *(13 баллов)*
Ответ: 47.
Решение: Возьмем максимальное число шаров каждого цвета, меньшее чем восемь. Будет взято $5+6+7+7+7+7+7=46$ шариков. Добавление любого шарика даст восьмерку шариков какого-то цвета.

7. У пяти братьев 100000 рублей. У первого и второго братьев 46000 рублей, у второго и третьего — 50000 рублей, у третьего и четвертого — 36000 рублей, у четвертого и пятого — 37000 рублей. Сколько денег у первого, третьего и пятого братьев вместе? *(14 баллов)*
Ответ: 48000.
Решение: Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - количество денег у первого, второго, третьего, четвертого и пятого братьев соответственно, тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=100000 \\ x_1+x_2=46000 \\ x_2+x_3=50000 \\ x_3+x_4=36000 \\ x_4+x_5=37000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=100000 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5=169000 \\ x_1+x_2+x_4+x_5=83000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=100000 \\ x_2+x_3+x_4=69000 \\ x_3=17000 \end{cases} \Rightarrow x_1+x_3+x_5=48000$$

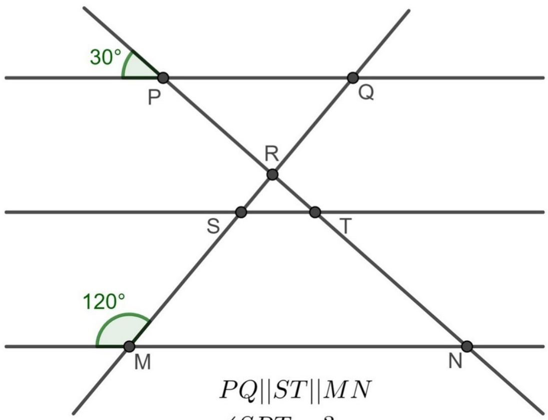
Значит у первого, третьего и пятого братьев вместе 48000 рублей.

8. Имеется 9 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на каждой карточке ровно одна из имеющихся цифр, переворачивать карточки нельзя). Сколько семизначных чисел можно составить из этих карточек, если карточки с номерами 1 и 3 не стоят рядом? *(20 баллов)*
Ответ: 151200.
Решение: Посчитаем количество таких чисел как разность между количеством всех возможных семизначных чисел и количеством семизначных чисел, в которых 1 и 3 стоят рядом. Количество всех возможных семизначных чисел, которые можно составить из карточек равно $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=181440$, потому что на первую позицию в числе мы можем поставить одну из 9 карточек, на вторую – одну из 8 оставшихся, на третью – из 7 и так далее. Теперь найдем количество чисел, в которых 1 и 3 стоят рядом. Понимаем, что у нас есть 6 вариантов расположения этой пары цифр в числе, причем в каждой паре цифры можно расставить двумя разными способами (либо 13, либо 31). На первую из оставшихся семи позиций мы можем поставить одну из 7 карточек, на вторую – одну из 6 и так далее. Значит таких чисел будет ровно $6\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=30240$. Тогда количество искомых чисел будет равно $181440-30240=151200$.

Блок 2.

1. 6 батончиков стоят 31 рубль. Сколько стоят 15 батончиков? *(8 баллов)*
Ответ: 77,5.
Решение: Если 6 батончиков стоят 31 рубль, то 1 батончик будет стоить 31 р $: 6=5\frac{1}{6}$ р, значит 15 батончиков обойдутся в $5\frac{1}{6}$ р $\cdot 15=77.5$ рублей.

2. *(10 баллов)*



$PQ||ST||MN$

$\angle SRT - ?$

Ответ: $90°$.

Решение: $\angle(PT, PQ) = \angle RTS = 30°$ как соответственные при $PQ \parallel ST$ и секущей PT. $\angle SMN = 180° - 120° = 60°$ по теореме о сумме смежных углов. $\angle SMN = \angle RST = 60°$ как соответственные при $ST \parallel MN$ и секущей SM. Тогда по теореме о сумме углов треугольника для $\triangle RST$: $\angle SRT = 180° - \angle RST - \angle RTS = 180° - 60° - 30° = 90°$.

3. Карандаш стоит 30 рублей, а ручка 80 рублей. Маша купила ручек и карандашей к новому учебному году для класса на 1000 рублей. Какое наибольшее количество карандашей могла купить Маша, если она потратила все деньги полностью? *(10 баллов)*

Ответ: 28.

Решение: Маша не могла купить карандаши на все деньги, так как 1000 не делится нацело на 30. Значит Маша купила хотя бы одну ручку, 1000 р $- 80$ р $= 920$ р не делится нацело на 30, а 1000 р $- 2 \cdot 80$ р $= 840$ р делится, тогда Маша купила ровно 840 р $: 30$ р $= 28$ карандашей.

4. Деревянный кубик с ребром 5 см окрасили в красный цвет со всех сторон, а затем распилили на одинаковые кубики с ребром 1 см. Сколько получилось маленьких кубиков ровно с двумя красными гранями? *(12 баллов)*

Ответ: 36.

Решение: При распиливании окрашенного со всех сторон кубика получаются кубики 4 типов: неокрашенные – находящиеся внутри, с одной окрашенной гранью – находящиеся внутри грани, с двумя – находящиеся на ребрах и с тремя – находящиеся в вершинах. Каждая грань большого куба является квадратом 5 на 5. Нам подходят кубики, расположенные по периметру квадрата и не находящиеся в вершинах куба. Поэтому на каждой грани $3 \cdot 4 = 12$ нужных кубиков. Всего граней 6, причем каждый кубик мы учли дважды, тогда кубиков с двумя красными гранями $6 \cdot 12 : 2 = 36$.

5. Прямая $y = kx + b$ симметрична прямой $3y - 2x + 1 = 0$ относительно прямой $y - x - 1 = 0$. Найти значение выражения $k - 2b$. *(13 баллов)*

Ответ: -4,5.

Решение: Отметим на данной прямой две точки $A(-1; -1)$ и $B(2; 1)$, тогда искомая прямая проходит через $A_1(-2; 0)$ и $B_2(0; 3)$, образы этих точек, полученные при симметрии относительно прямой $y - x - 1 = 0$. Значит уравнение искомой прямой $y = 1.5x + 3$. Тогда $k - 2b = -1.5 + 2 \cdot 3 = -4.5$.

6. В большом ящике лежат шарики разных цветов: 6 красных, 6 оранжевых, 7 желтых, 7 зеленых, 8 голубых, 8 синих и 9 фиолетовых. Шарики вынимают из ящика в полной темноте. Какое минимальное число шариков нужно достать, чтобы среди них гарантированно нашлось 7 шариков разных цветов? *(13 баллов)*

Ответ: 46.

Решение: Возьмем максимальное возможное число шаров шести цветов. Будет взято $6+7+7+8+8+9=45$ шариков. Добавление любого шарика даст семерку шариков разных цветов.

7. У пяти одноклассников 90 конфет. У первого и второго одноклассников 40 конфет, у второго и третьего — 29 конфет, у третьего и четвертого — 30 конфет, у четвертого и пятого — 37 конфет. Сколько конфет у второго и четвертого одноклассников вместе? *(14 баллов)*
Ответ: 33.
Решение: Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - количество конфет у первого, второго, третьего, четвертого и пятого одноклассников соответственно, тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=90 \\ x_1+x_2=40 \\ x_2+x_3=29 \\ x_3+x_4=30 \\ x_4+x_5=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=90 \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5=136 \\ x_1+x_2+x_4+x_5=77 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2+x_3+x_4=46 \\ x_3=13 \end{cases} \Rightarrow x_2+x_4=33$$

Значит у второго и четвертого одноклассников вместе 33 конфеты.

8. Имеется 9 карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на каждой карточке ровно одна из имеющихся цифр, переворачивать карточки нельзя). Сколько семизначных чисел можно составить из этих карточек, если цифры 1 и 3 обязательно присутствуют в числе, причем 1 занимает одно из первых четырех мест, а 3 одно из последних четырех мест? *(20 баллов)*
Ответ: 37800.
Решение: Поймем, сколькими способами можно разместить цифры 1 и 3 в искомом числе. Если 1 стоит на одном из первых трех мест, то у нас есть 4 варианта как поставить цифру 3, если же 1 стоит на четвертом месте, то у нас есть 3 варианта как поставить цифру 3. Значит всего вариантов размещения цифр 1 и 3 будет $4+4+4+3=15$. На первую из оставшихся семи позиций мы можем поставить одну из 7 карточек, на вторую – одну из 6, на третью – одну из 5 и так далее. Значит таких чисел будет ровно $15\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=37800$.