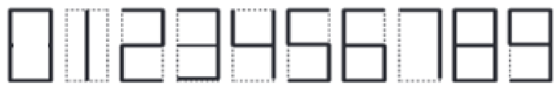
Интеллектуальный марафон по математике.
Заключительный тур
6 класс. Решения

1. Миша записал на доске 10 чисел, модули которых – попарно различные целые однозначные числа. Саша разбил эти числа на пары, нашел произведения пар, а все полученные результаты сложил. Мог ли Саша получить сумму меньшую минус 135?

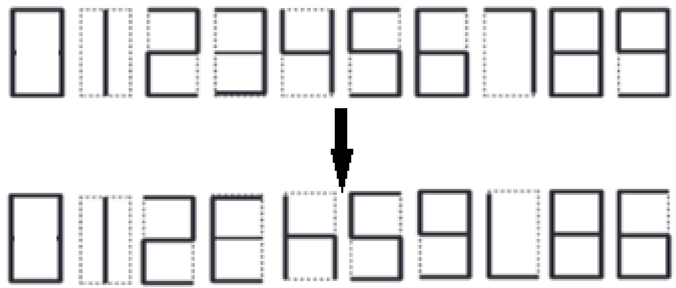
Решение: да, мог. Например, если на доске были записаны числа: -9, -7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 6, 8, то сумма могла быть равна
-140=-9*8+(-7)*6+(-5)*4+(-3)*2+(-1)*0.

2. Виктор и Михаил сидят напротив друг друга за столом. У Виктора есть карточки с цифрами от 0 до 9, каждой не менее 3 штук (форма записи цифр на рисунке). Он поочередно выкладывает на столе всевозможные четырехзначные числа из карточек. Михаил смотрит на число с другой стороны стола. Сколько четырехзначных чисел Виктор и Михаил видят одинаково?



Ответ: 42 числа

Решение: Рассмотрим, как одну и ту же цифру видят Виктор и Михаил.



Т.е. 0 переходит в 0, 1 в 1, 2 в 2, 5 в 5, 8 в 8, 6 в 9, 9 в 6. Так как Виктор и Михаил видят одно и то же число, то если на первом месте стоит одна из цифр 1, 2, 5, 6, 8, 9, то на четвертом месте должны стоять 1, 2, 5, 9, 8, 6 соответственно. Если на втором месте стоят 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, то на третьем месте должны стоять 0, 1, 2, 5, 9, 8, 6 соответственно.

Получаем, что на первое место можно поставить одну из 6 цифр, на второе – одну из 7 цифр, на третье – 1 цифру (в зависимости от первой), на четвертое – 1 цифру (в зависимости от второй). Всего чисел:
$6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 42$

Критерии оценивания:
1 балл: Ответ без объяснений.
3 балла: При решении не учли одну из цифр
7 баллов: Верное решение
-1 балл за арифметическую ошибку

3. В начале учебного года родители закупили на 7А класс 6 пачек тетрадей в клетку и 11 пачек тетрадей в линейку. Пачка с тетрадями в клетку содержит 25 штук, с тетрадями в линейку – 10 штук. Тетради каждого типа раздали ученикам поровну, так чтобы осталось как можно меньше. При этом тетрадей в клетку осталось 6 штук, в линейку – 2 штуки. Сколько в 7А классе человек, если во всей седьмой параллели обучается меньше 40 человек, всего 4 класса и в каждом больше 1 ученика?

Ответ: 9, 12, 18.

Решение: Закупили $25 \cdot 6 = 150$ тетрадей в клетку и $10 \cdot 11 = 110$ тетрадей в линейку.

Детям раздали $150 - 6 = 144$ тетради в клетку и $110 - 2 = 108$ тетрадей в линейку. Так как во всех комплектах тетрадей каждого вида поровну, то общее количество комплектов является общим делителем чисел 144 и 108.

$144 = 2^4 \cdot 3^2, 108 = 2^2 \cdot 3^3.$

$\text{НОД}(144, 108) = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$

$\text{ОД}(144, 108) = \text{Д}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}.$

Так как 6 тетрадей в клетку осталось, то комплектов было больше 6. Т.к. во всей школе обучается меньше 40 человек, всего 4 класса и в каждом больше 1 ученика, то комплектов не более $39 - 2 \cdot 3 = 33$. Значит, было сформировано или 9, или 12, или 18 комплектов.

Критерии оценивания:

1 балл: Ответ без объяснений

1 балл: Доказано, что не может быть 36 и больше

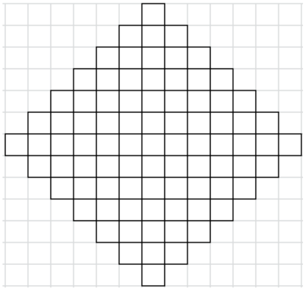
2 балл: Доказано, что не может быть меньше 7

7 баллов: Верное решение

-1 балл если нет объяснения почему необходимо искать общие делители

-1 балл за арифметическую ошибку

4. На клетчатом поле, показанном на рисунке, расставили 1-палубный, 2-палубный, …, n-палубный корабли в соответствии с правилами морского боя (т. е. корабли не могут соприкасаться друг с другом). Оказалось, что добавить ещё один однопалубный корабль, не нарушив правил, невозможно. Какое наименьшее значение может принимать n?



Решение: n = 7 (см. рис. 1). Предположим, что n<7. Рассмотрим клетки, отмеченные на рис. 2. 4-палубный и более короткие корабли соприкасаются не более чем с 1 из этих клеток, а более длинные корабли - не более чем с 2. Тогда вместе все корабли соприкасаются не более чем с 4+2*2=8 из этих клеток, а их 9. Значит, с какой-то клеткой ни один корабль не соприкасается, и туда можно поставить однопалубный корабль. Противоречие. Итак, ответ - 7.

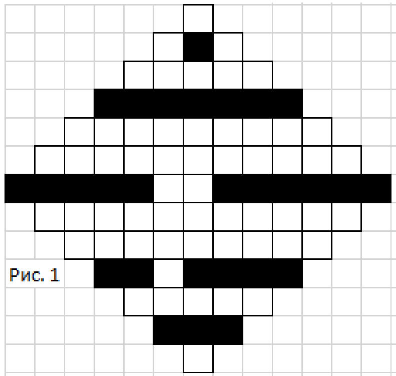


Рис. 1

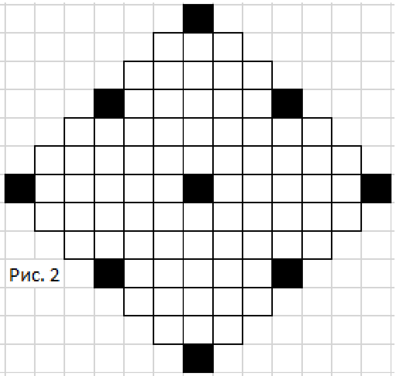


Рис. 2

Критерии оценивания:

Оценка - 3 балла

Пример - 3 балла

5. У Васи имеется 17 пар туфель: 1 белая, 7 бежевых, 9 черных. Он хранит их в двух шкафах: в одном - левые туфли, в другом - правые. Какое минимальное число туфель должен достать Вася, чтобы среди них обязательно нашлась 1 пара одного цвета? Вася выбирает сам, из какого шкафа в очередной раз доставать туфлю, и при этом каждый раз видит цвет туфли, которую достал.

Решение: Докажем, что ответ 10.

Сначала покажем, что 9 туфель не хватит. Пусть вне зависимости от действий Васи, из первого шкафа он будет доставать сначала все чёрные, потом все бежевые, потом белую, а из второго наоборот — сначала белую, потом все бежевые, потом все чёрные. Тогда, если первая найденная пара будет белой, то он достал хотя бы 17 + 1 = 18 туфель (17 и 1 — минимальное количество туфель, которое надо достать из соответствующего шкафа. Аналогично, если она бежевая, это 10 + 2 = 12, и если чёрная, 1 + 9 = 10. Значит минимум 10 туфель ему придётся достать.

Теперь покажем, как Васе надо действовать, чтобы гарантировано найти пару, вытянув не более 10 туфель. Пусть Вася действует так: он достаёт туфли из первого шкафа, пока не вытянет чёрную, а после из второго, пока не победит. Оценим число туфель, которое Вася при этом мог достать. Помимо последней вытянутой, образовавшей первую пару, туфли все туфли, что достал Вася не имели пары, т. е. среди них было не более одной белой и семи бежевых. Что касается чёрных, из первого шкафа в данной стратегии Вася вытащил ровно одну, а из второго, если и вытащил, то она была обязана образовать пару. Значит всего Вася достал туфель не больше чем 1 + 7 + 1 = 9, не считая последней, т. е. всего не более 10, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

Доказано, что 9 не хватит - 3 балла

Доказано, что 10 хватит - 3 балла